第20講　ベクトル(2)

1　三角形ABCにおいて，辺BC，CA，ABのそれぞれの中点をD，E，Fとする．また，p を $0<p<1$ を満たす数として，線分EF，FD，DEをそれぞれ $p:(1-p)$ に内分する点をG，H，Iとする．$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，p を用いて表せ．

(2)　3点A，G，Hが一直線上にあるときの p の値を求めよ．

(3)　p が(2)で求めた値であるとし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|^2$ を求めよ．

＜ Note ＞

2　三角形ABCにおいて，3辺の長さは $AB=2a+1$，$BC=2a$，$CA=a$ であり，$\cos\angle BAC=\dfrac{11}{24}$ である．ただし，$a>0$ とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2)　辺ABを1：3に内分する点をQ，辺CAの垂直二等分線と線分CQ，辺CAとの交点をそれぞれP，Rとおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

＜ Note ＞

3　平面上の3点A，B，Cは同一直線上にないものとし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$とする．また，$t$を正の実数とし，平面上の点Pを$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と定め，線分APとBCの交点をQとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$t$および$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表せ．

(2)　三角形ABPの面積をtと内積$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$かつ点Qが線分BCを1：2に内分するとき，三角形BPQの面積を求めよ．

＜ Note ＞

第20講　ベクトル(2)

平面上に三角形OABがあり，3辺の長さは AB＝5，OA＝6，OB＝7 であるとする．この三角形OABと正の数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点Pをとる．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ [アイ] である．

(2)　t が正の数全体を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小値をとるような t の値を t_0 とし，$t=t_0$ のときの点Pを $\mathrm{P_0}$ とすれば，$t_0=\dfrac{\sqrt{\fbox{ウエ}}}{\fbox{オ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}|=$ [カキ] である．さらに，点 $\mathrm{P_0}$ から直線OAに下ろした垂線を $\mathrm{P_0H}$ とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\fbox{ク}\sqrt{\fbox{ケコ}}}{\fbox{サ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である．

＜ Note ＞

第20講　ベクトル(2)

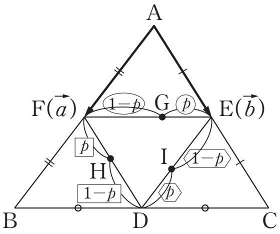
1　三角形ABCにおいて，辺BC，CA，ABのそれぞれの中点をD，E，Fとする．また，pを$0<p<1$を満たす数として，線分EF，FD，DEをそれぞれ$p:(1-p)$に内分する点をG，H，Iとする．$\overrightarrow{AF}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$として，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AH}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，pを用いて表せ．

(2)　3点A，G，Hが一直線上にあるときのpの値を求めよ．

(3)　pが(2)で求めた値であるとし，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=60°$であるとき，$|\overrightarrow{GH}|^2$を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{p\vec{a}+(1-p)\vec{b}}$　　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FH}=\vec{a}+p\overrightarrow{FD}=\boldsymbol{\vec{a}+p\vec{b}}$



(2)　A，G，Hが一直線上より　$p:(1-p)=1:p$

$p^2+p-1=0$　　$0<p<1$より　$\boldsymbol{p=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(3)　$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$より　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$　　$\angle BAC=60°$より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AG}=(1-p)\vec{a}+(2p-1)\vec{b}$

$|\overrightarrow{GH}|^2=(1-p)^2|\vec{a}|^2+2(1-p)(2p-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(2p-1)^2|\vec{b}|^2$

$=4(1-p)^2+2(1-p)(2p-1)+(2p-1)^2$

$=4p^2-6p+3$

$=(p^2+p-1)\times4-10p+7$

$=-10p+7$

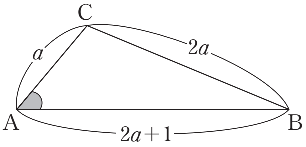
$=-10\times\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+7=\boldsymbol{12-5\sqrt{5}}$

2　三角形ABCにおいて，3辺の長さはAB$=2a+1$，BC$=2a$，CA$=a$であり，$\cos\angle BAC=\dfrac{11}{24}$である．ただし，$a>0$とする．

(1)　内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$を求めよ．

(2)　辺ABを1：3に内分する点をQ，辺CAの垂直二等分線と線分CQ，辺CAとの交点をそれぞれP，Rとおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ．

(1)　余弦定理より　$4a^2=(2a+1)^2+a^2-2\times(2a+1)\times a\times\dfrac{11}{24}$

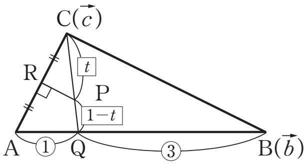


$10a^2-37a-12=0$　　$(a-4)(10a+3)=0$

$a>0$より　$a=4$

よって　AB$=9$，BC$=8$，CA$=4$

したがって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=9\times4\times\dfrac{11}{24}=\boldsymbol{\dfrac{33}{2}}$



(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，$|\vec{b}|=9$, $|\vec{c}|=4$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{33}{2}$

Pは線分QC上の点より

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}+(1-t)\overrightarrow{AC}=\frac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{c}-\left\{\frac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}$$

$$=-\frac{t}{4}\vec{b}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=\frac{1}{4}\{-t\vec{b}+(4t-2)\vec{c}\}$$

$\overrightarrow{PR}\perp\overrightarrow{AC}$　より　$\dfrac{1}{4}\{-t\vec{b}+(4t-2)\vec{c}\}\cdot\vec{c}=0$

$$-t\vec{b}\cdot\vec{c}+(4t-2)|\vec{c}|^2=0\qquad -\frac{33}{2}t+(4t-2)\times16=0\qquad t=\frac{64}{95}$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\dfrac{16}{95}\overrightarrow{AB}+\dfrac{31}{95}\overrightarrow{AC}}$

【別解】　Pは線分QC上の点より　$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}+(1-t)\overrightarrow{AC}=\dfrac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

また　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAR=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AR}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=8$　より

$$\left\{\frac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=8\qquad \frac{t}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)|\vec{c}|^2=8$$

$$\frac{33}{8}t+(1-t)\times16=8\qquad t=\frac{64}{95}$$

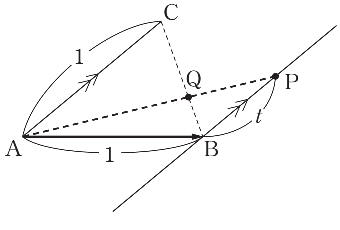
ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\dfrac{16}{95}\overrightarrow{AB}+\dfrac{31}{95}\overrightarrow{AC}}$

3　平面上の3点A，B，Cは同一直線上にないものとし，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=1$ とする．また，t を正の実数とし，平面上の点Pを $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と定め，線分APとBCの交点をQとする．

(1)　$\overrightarrow{AQ}$ を t および $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(2)　三角形ABPの面積を t と内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CP}$ かつ点Qが線分BCを1：2に内分するとき，三角形BPQの面積を求めよ．



(1)　Qは線分AP上の点より

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=k(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})=k\overrightarrow{AB}+kt\overrightarrow{AC}$　とおける．

Qは線分BC上の点より　$k+kt=1$　　$(1+t)k=1$

$t>0$ より　$k=\dfrac{1}{1+t}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}}$

(※　△QBP∽△QCA（相似比 t：1）より　BQ：CQ＝t：1

よって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}$)

(2)　辺 AB は共通　かつ　AC∥BP　より　△ABC：△ABP＝AC：BP＝1：t

よって，$\triangle ABP=t\times\triangle ABC=t\times\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\boldsymbol{\dfrac{t}{2}\sqrt{1-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}}$

(3)　BQ：QC＝1：2＝$\dfrac{1}{2}$：1　より　$t=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CP}$　より

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}$

また，AQ：QP＝1：t＝1：$\dfrac{1}{2}$＝2：1

よって，$\triangle BPQ=\dfrac{1}{3}\triangle ABP=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{24}}$

第 20 講　ベクトル(2)

平面上に三角形 OAB があり，3 辺の長さは AB＝5，OA＝6，OB＝7 であるとする．この三角形 OAB と正の数 t に対して，$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\frac{1}{t}\overrightarrow{OB}$ を満たす点 P をとる．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ **アイ** である．

(2)　t が正の数全体を動くとき，$|\overrightarrow{OP}|$ が最小値をとるような t の値を t_0 とし，$t=t_0$ のときの点 P を P_0 とすれば，$t_0=\frac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$，$|\overrightarrow{OP_0}|=$ **カキ** である．さらに，点 P_0 から直線 OA に下ろした垂線を P_0H とすれば $\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}\overrightarrow{OA}$ である．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{6^2+7^2-5^2}{2}=\mathbf{30}$

(2)　$|\overrightarrow{OP}|^2=\left|t\overrightarrow{OA}+\frac{1}{t}\overrightarrow{OB}\right|^2=t^2|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{t^2}|\overrightarrow{OB}|^2$

$$=36t^2+\frac{49}{t^2}+60\geqq 2\sqrt{36t^2\times\frac{49}{t^2}}+60=144$$

等号成立は　$36t^2=\frac{49}{t^2}$　　$t>0$ より　$t=\sqrt{\frac{7}{6}}=\frac{\sqrt{42}}{6}$ のとき．

よって　$t_0=\boldsymbol{\frac{\sqrt{42}}{6}}$，$|\overrightarrow{OP_0}|=\sqrt{144}=\mathbf{12}$　である．

ここで，$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}$（$k$ は実数）と表すと

$$\overrightarrow{P_0H}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP_0}=k\overrightarrow{OA}-\left(t_0\overrightarrow{OA}+\frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB}\right)=(k-t_0)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{P_0H}\perp\overrightarrow{OA}$　より　$\overrightarrow{P_0H}\cdot\overrightarrow{OA}=\left\{(k-t_0)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{t_0}\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OA}$

$$=(k-t_0)|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{1}{t_0}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$36\left(k-\frac{\sqrt{42}}{6}\right)-\frac{6}{\sqrt{42}}\times 30=0$　　$k=\frac{2\sqrt{42}}{7}$　　よって，$\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{42}}{7}}\overrightarrow{OA}$